Title	自由位相群の単位元の近傍系について
Author(s)	山田, 耕三
Citation	数理解析研究所講究録 (1992), 784: 1-27
Issue Date	1992-05
URL	http://hdl.handle.net/2433/82566
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
第 784 巻 1992 年 1-27

自由位相群の単位元の近傍系について

大阪教育大学　　山田　耕三　(Kohzo Yamada)

0　序文

位相的構造と代数的構造を同時に持つ位相群に対しては、これまで多くの数学者によって研究されてきた。その基本的な問題、位相群は常に正規空間となるかという問題に対する反例として、１９４１年、 A. A. Markov [10] によって位相空間 X に対する自由（可換）位相群 $F(X)$ $(A(X))$ が定義された。以下、$F(X)$ と $A(X)$ を区別する必要のない場合は、両者を代表して $G(X)$ で表す。さて、$G(X)$ の存在と唯一性は、A. A. Markov [11] さらには T. Nakayama [12], S. Kakutani [8] によってそれぞれ証明された。一方、M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由位相群を定義し、その存在と唯一性を証明した。

以来、$G(X)$ の位相的構造についての研究が行われてきたが、その重要なテーマの一つは、位相空間 X の性質がどれだけ $G(X)$ に反映するかを調べることである。しかしながら、 $G(X)$ の代数的構造に比べ、その位相的構造は相当複雑である。例えば、$G(X)$ が第１可算公理を満たすのは、X が離散空間のときのみに限ることが分かっている。さらに、 $G(X)$ の定義にはその内部の位相的構造について何も述べられていない。これらのことが、$G(X)$ の位相的構造の研究を困難なものとしてきた。さて、１９７０年代になって、 具体的な空間から生成される自由位相群については、少しずつ位相的構造（位相的性質）が明らかにされてきたが、その重要な手段となったのが、M. I. Graev が自由位相群の存在の証明に用いた Graev の距離と呼ばれる、距離空間 X から生成される $G(X)$ 上のある群位相を導入する距離である。

しかしながら、Graev の距離が導入する $G(X)$ 上の群位相は、自由位相群の本来の位相よりは弱いため、$G(X)$ の位相的構造そのものを表現することはできない。それに対し、１９８０年代になって、A. V. Arhangel'skiĭ をはじめとするモスクワ大学のグループにより、$G(X)$ の単位元の近傍系を直接表現する研究が行われた。彼らの研究により、いくつかの単位元の近傍系が得られ、それらを使って、$G(X)$ の位相的構造の研究が飛躍的進

歩を遂げたが、それらの近傍系の構成はなお相当複雑であり、応用することが困難であった。これに対し、最近 $A(X)$ におけるその構成が比較的簡単な近傍系を作ることができた。この構成がこの論文の目的である。

さて、第1節には、自由位相群の基本的性質が述べられている。これらの性質は、今や頻繁に使われているが、その証明がどの論文に与えられているのかが分からないものや、証明無しに結果だけが報告されたものも少なくない。そこで、ここではそれらの証明を与えることにした。続く第2節は、前述した Graev の距離に関する話題である。現在では、より拡張された Graev の擬距離がよく使われる。そこで、ここではこの拡張された Graev の擬距離の性質と、それを使って得られる、重要な $G(X)$ の位相的性質を紹介する。そして最後の第3節では、モスクワ大学のグループによって得られた近傍系と、最近得られた近傍系の構成について述べる。

尚、この論文においては、空間はすべて Tychonoff 、写像はすべて連続とする。また、N はすべての自然数の集合を表す。位相空間論に関する用語及び諸事実については [4], [9] を、また位相群に関する諸事実については [6], [13] を参照されたい。さらに、自由位相群に関するいろいろな結果や話題については、[2] に詳しく述べられているので、それを参照されたい。

1 自由位相群の定義と基本的性質

まず、A. A. Markov によって与えられた位相自由群の定義と、この論文で使われる記号について述べる。

定義 1.1 ([10]) 空間 X から生成された自由群 $F(X)$ に、次の性質を満たす $F(X)$ 上の群位相 $\mathcal{T}$ を導入したとき $(F(X), \mathcal{T})$ を X から生成された**自由位相群**と呼ぶ。(以後単に $F(X)$ と表す。)

(1) X は、$F(X)$ の部分空間として含まれる。

(2) X から任意の位相群 G への連続写像 f は、$F(X)$ 上の連続な準同型写像に拡張できる。

空間 X から生成された自由可換群 $A(X)$ に、上記の性質 (1) と任意の可換位相群 G に対する性質 (2) を満たす、$A(X)$ 上の群位相 $\mathcal{T}$ を導入したとき、$(A(X), \mathcal{T})$ を X から生成された**自由可換位相群**と呼ぶ。(以後単に $A(X)$ と表す。)

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[ddrr, "\overline{f}(x_1^{\varepsilon_1}\cdots x_n^{\varepsilon_n}) = f(x_1)^{\varepsilon_1}\cdots f(x_n)^{\varepsilon_n} \ : \text{連続な準同型}"] & & \\ \bigcup & & \\ X \arrow[rr, "f : \text{連続}"] & & G \end{tikzcd}$$

以下、この論文では、$F(X)$ と $A(X)$ を区別する必要のない場合は、両者を代表して、$G(X)$ で表す。また、$F(X)$ と $A(X)$ の両者において同様の証明で得られる結果については、その証明は $F(X)$ の場合の証明のみを与える。

注意 1.2　M. I. Graev [5] は、少し拡張された自由（可換）位相群を定義し、その自由（可換）位相群についていろいろな結果を得たが、それらの多くは A. A. Markov が定義した自由（可換）位相群においても成立する。そこでこの論文では、それらの結果を A. A. Markov によって定義された自由（可換）位相群（定義 1.1）について証明する。

$G(X)$ の基本的性質を証明するために、まずいくつかの記号を準備する。

記号 1.3　X を空間とする。$F(X)$ の単位元を e、$A(X)$ の単位元を 0 とする。さて、$F(X)$ の単位元以外の任意の元 g は、唯一の既約表現 $g = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ で表される。但し、各 $i \le n$ に対して、$x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ とする。このとき、

$$\ell_+(g) = |\{i \le n : \varepsilon_i = 1\}|, \quad \ell_-(g) = |\{i \le n : \varepsilon_i = -1\}|, \quad \text{そして} \quad \ell(g) = \ell_+(g) + \ell_-(g)$$

とおく。このとき、$\ell(g)$ を g の**長さ**と呼ぶ。（但し、$\ell(e) = 0$ とする。）また、各 $n \in N$ に対して、$F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \le n\}$ とおく。さらに、$\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ とし、$\widetilde{X}^n$ から $F_n(X)$ への写像 i_n を $i_n((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n$ と定義する。

$A(X)$ に関してもこれらの記号は同様に定義される。

命題 1.4 ([1], [5])　(1) $\mathcal{T}_1$ を $G(X)$ 上の群位相で、X 上では空間 X の位相と一致するものとするならば、$\mathcal{T}_1 \le \mathcal{T}$ となる。さらに、$\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ をこのような性質を満たす $G(X)$ 上のすべての群位相としたとき、$\mathcal{T} = \sup\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ となる。

(2) i_n は連続である。よって、もし X がコンパクトならば各 $G_n(X)$ もまたコンパクトとなる。

(3) 空間 X 及び各 $G_n(X)$ は $G(X)$ の閉集合となる。

証明 (1) の前半は、$G(X)$ の定義の性質 (2) よりすぐに分かる。また、後半も $\sup\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ が $G(X)$ 上の群位相で且つ、X 上では空間 X の位相と一致することより明か。(2) は、群位相では群の演算は連続よりやはり明か。よって、(3) を証明する。今、空間 X に対してβX を X の Stone-Čech コンパクト化とすると、包含写像 $i : X \longrightarrow F(\beta X)$ は、$F(X)$ 上の連続な準同型写像 $\bar{i}$ に拡張される。すると、各 $n \in N$ に対して、

$$\bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。今、(2) より各 $F_n(\beta X)$ はコンパクト、よって $F(\beta X)$ の閉集合となる。このことより各 $F_n(X)$ は $F(X)$ の閉集合となる。 ■

定理 1.5 空間 X において、$i : X \longrightarrow A(X)$ を包含写像とする。このとき、i の $F(X)$ 上への拡張である連続な順同型写像を ϕ とすると、$\phi : F(X) \longrightarrow A(X)$ は開写像となる。よって、$A(X)$ は $F(X)/\ker\phi$ と代数的に同型で且つ位相的にも同相である。

証明 $\mathcal{U}$ を $F(X)$ 上での群位相の開基とすると、$\phi(\mathcal{U})$ は、$A(X)$ において群位相の公理 (cf. [6]) を満たすことが証明できる。そこで、$\phi(\mathcal{U})$ によって導入される $A(X)$ 上の群位相を、$\mathcal{T}_1$ とするとき、$\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相と等しいことを示す。そこで、$F(X)$ の任意の開集合 V と $z \in V$ で $\phi(z) = x \in X$ となるものをとると、

$$\phi(V) = \phi(xz^{-1}V) \supset \phi(xz^{-1}V \cap X) \ni x$$

となる。ここで、$xz^{-1}V \cap X$ は x の X での開近傍より $\phi(xz^{-1}V \cap X)$ はやはり x の X での開近傍となる。一方、ϕ は連続より任意の $x \in X$ と x の X での開近傍 U に対して、x の $F(X)$ での開近傍 V で

$$x = \phi(x) \in \phi(V) \cap X \subset U$$

を満たすものが存在する。以上より、$\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相と等しいことが分かる。よって、命題 1.4 の (1) より、$\mathcal{T}_1$ は $A(X)$ の自由群位相より弱くなる。つまり、ϕ は開写像となる。 ■

次に、$G(X)$ の重要な部分群 G_0 を紹介する。この G_0 は $G(X)$ の位相的性質を調べるのに大変役だっている。実際、いくつかある単位元の近傍系も、実はすべて G_0 上で構成されている。(第 3 節を参照せよ。)

命題 1.6 $G_0 = \{g \in G(X) : \ell_+(g) = \ell_-(g)\}$ とおくと、G_0 は $G(X)$ の閉且つ開部分群となる。

証明 f を X から、加群で且つ離散空間である整数全体の集合 Z への写像で、すべての $x \in X$ に対して $f(x) = 1$ となるものとする。そこで、$\overline{f}$ を $F(X)$ 上へ拡張した連続な順同型写像とする。するとこのとき明らかに、$F_0 = \overline{f}^{-1}(0)$ となる。 ■

$G(X)$ の位相的構造は、その代数的構造と比べると非常に複雑である。実際、M. I. Graev は、$G(X)$ が第 1 可算公理を満たすのは、X が離散空間のときのみに限ることを示した。その事実を証明するために、まず次の補題を証明する。

補題 1.7 ([5]) X を無限個の元をもつ空間とし、X から、点列 $\{x_i : i \in N\}$, $\{y_i : i \in N\}$ で 任意の $i \in N$ に対して、$x_i \neq y_i$ となるものをとる。そこで、任意の $n \in N$ に対して、$u_n = 2^n(x_n - y_n)$ とおくと、各 u_n は $A(X)$ の元で、0 は 点列 $\{u_n : n \in N\}$ の集積点にはならない。

証明 各 $n \in N$ に対して、次の性質を持つ連続写像 $f_n : X \longrightarrow [-\frac{1}{2^n}, \frac{1}{2^n}]$ を帰納法で定義する。

(1) $a \in \{0\} \cup \{x_i, y_i : i = 1, 2, \ldots, n-1\}$ に対して、$f_n(a) = 0.$

(2) $f_n(y_n) = 0.$

(3) $f_n(x_n) = \frac{\varepsilon_n}{2^n}$, 但し$\varepsilon_n$ は、$\sum_{i=1}^{n-1}(f_i(x_n) - f_i(y_n))$ の符号とする。また、$f_1(x_1)$ の符号は、± 1 のどちらでもよい。

まず、$f_1 : X \longrightarrow [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ は $f_1(0) = f_1(y_1) = 0$, $f_1(x_1) = \frac{1}{2}$ を満たすようにとる。次に、$f_2 : X \longrightarrow [-\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}]$ を $f_2(0) = f_2(x_1) = f_2(y_1) = f_2(y_2) = 0$, $f_2(x_2) = \frac{\varepsilon_2}{2^2}$, 但し ε_2 は $f_1(x_2) - f_1(y_2)$ の符号、を満たすようにとる。以下同様にして f_n を作り、

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n : X \longrightarrow R$$

とおくと、f は連続で $f(0)=0$ となる。そこで、$A(X)$ の定義より、$\overline{f}$ を $A(X)$ 上へ拡張した連続な順同型写像とする。すると、任意の $n\in N$ に対して

$$\begin{aligned}|\overline{f}(u_n)| &= |\overline{f}(2^n(x_n-y_n))| = 2^n|f(x_n)-f(y_n)| \\ &= 2^n|\sum_{i=1}^{\infty}(f_i(x_n)-f_i(y_n))| \\ &= 2^n|\sum_{i=1}^{n-1}(f_i(x_n)-f_i(y_n))+f_n(x_n)| \\ &\geq 2^n|f_n(x_n)|=1\end{aligned}$$

一方 $\overline{f}(0)=f(0)=0$ より、0 は $\{u_n:n\in N\}$ の集積点にはならない。 ■

命題 1.8 ([5])　空間 X が離散空間でないならば、$G(X)$ は第 1 可算公理を満たさない。

証明　一般に、位相群 G と その正規部分群 H に対して、$\mathcal{U}$ を G のある元 g の近傍系とするとき、

$$\{U^*=\{xH:x\in U\}\ (=UH):U\in\mathcal{U}\}$$

は 商位相群 G/H における $[g]$ の近傍系となる。この事実と、定理 1.5 より、$A(X)$ が第 1 可算公理を満たさないことを示せばよい。

X が離散空間でないことより、X の元 x で任意の x の近傍 U に対し、$|U\setminus\{x\}|\geq\aleph_0$ となるものがある。ここで、今 0 の可算個からなる近傍系 $\{U_n:n\in N\}$ が存在したとする。すると、各 $n\in N$ に対して、x の X における近傍 V_n で

$$2^n(V_n-V_n)\subset U_n$$

を満たすものがある。すると仮定より、各 V_n の中に異なる 2 点 x_n, y_n がとれる。そこで、$u_n=2^n(x_n-y_n)$ とおくと、

$$u_n\in 2^n(V_n-V_n)\subset U_n$$

となり、点列 $\{u_n:n\in N\}$ が 0 に収束するが、これは、補題 1.7 に矛盾する。 ■

M. I. Graev は上記のような、$G(X)$ の位相的構造を調べるうえには悲劇的な結果を示したが、一方現在の $G(X)$ の研究の発展の元となる次の結果も示した。

定理 1.9 ([5])　空間 X がコンパクトのとき、$G(X)$ の部分集合 U が $G(X)$ で開集合となる必要十分条件は、任意の $n \in N$ に対して、$U \cap G_n(X)$ が $G_n(X)$ で開集合となることである。

空間 X がコンパクトのときは、各写像 i_n は閉写像、つまり商写像となる。そこで今、$\mathcal{T}_\infty$ を $G(X)$ 上の位相で、次の条件を満たすものとする。

$$U \in \mathcal{T}_\infty \Longleftrightarrow \text{任意の } n \in N \text{ に対して } i_n^{-1}(U \cap G_n(X)) \text{ が } \widetilde{X}^n \text{ の開集合。}$$

すると、定理 1.9 から次のことが分かる。

系 1.10　X がコンパクトならば、$\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。

この結果に関して、A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev そして V. G. Pestov [3] の結果を合わせることにより、最近、次の事実が証明できた。

系 1.11 ([20])　距離空間 X において次は同値である。

(1) $F(X)$ は k–空間となる。

(2) $F(X)$ は k_ω–空間、または離散空間となる。

(3) $\mathcal{T}_\infty$ は $F(X)$ 上の群位相となる。

(4) $F(X)$ において $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。

(5) X は局所コンパクトな可分空間、または離散空間となる。

系 1.12 ([20])　距離空間 X において次は同値である。

(1) $A(X)$ は k–空間となる。

(2) $\mathcal{T}_\infty$ は $A(X)$ 上の群位相となる。

(3) $A(X)$ において $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。

(4) X は局所コンパクト空間、且つ X の導集合が可分となる。

さて、定理 1.9 の証明だが、ここでは、少し拡張された次の結果を証明する。

定理 1.13 ([18])　各 $G_n(X)$ が局所コンパクトとすると、$G(X)$ の部分集合 V が $G(X)$ で開集合となる必要十分条件は、任意の $n \in N$ に対して $V_n = V \cap G_n(X)$ が $G_n(X)$ で開集合となることである。

証明　必要性は明らかなので、十分性を示す。そこで、$\mathcal{V} = \{V \subset F(X) :$ 各 V_n は $F_n(X)$ で開集合 $\}$ とおく。まず初めに、$\mathcal{V}$ が $F(X)$ 上の群位相を導入することを示す。実際、$\mathcal{V}$ が次の性質を満たすことを示せばよい。

> 任意の $V \in \mathcal{V}$ と $a, b \in F(X)$ で $ab^{-1} \in V$ となるものに対して、ある $U(a), U(b) \in \mathcal{V}$ が存在して、条件 $a \in U(a)$, $b \in U(b)$, そして $U(a)\,U(b)^{-1} \subset V$ を満たす。

そこで、$V \in \mathcal{V}$ と $a, b \in F(X)$ で $ab^{-1} \in V$ となるものをとる。今、$\ell(a), \ell(b) \leq k$ と仮定しておき、$i \geq k$ に関する帰納法により、集合 $U_i(a)$ と $U_i(b)$ で次を満たすものを作る。

(1) $a \in U_i(a)$ 且つ、$b \in U_i(b)$,

(2) $U_i(a)$ と $U_i(b)$ は共に $F_i(X)$ の開集合,

(3) 任意の $j \leq i$ に対して $U_j(a) \subset U_i(a)$ 且つ、$U_j(b) \subset U_i(b)$,

(4) $\overline{U_i(a)}\,\overline{U_i(b)}^{-1} \subset V_{2i}$,

(5) $\overline{U_i(a)}$ と $\overline{U_i(b)}$ は共にコンパクト。

V_{2k} は $F_{2k}(X)$ の開集合より、$V_{2k} = V' \cap F_{2k}(X)$ となる $F(X)$ の開集合 V' をとる。すると、$F_k(X)$ が局所コンパクトより、次を満たす $F(X)$ の開集合 U_a, U_b がとれる。

$$\overline{U_a}\,\overline{U_b}^{-1} \subset V', \text{ 且つ } \overline{U_a \cap F_k(X)} \text{ と } \overline{U_b \cap F_k(X)} \text{ はコンパクトとなる。}$$

そこで、

$$U_k(a) = U_a \cap F_k(X) \text{ そして } U_k(b) = U_b \cap F_k(X)$$

とおくと、明らかに $U_k(a)$ と $U_k(a)$ は k における上記の性質を満たす。

さて、$i = k, k+1, \ldots, n$ に対して、$U_i(a)$ と $U_i(b)$ が作れたと仮定し、$U_{n+1}(a)$ と $U_{n+1}(b)$ を以下のようにして作る。まず、

$$E = \overline{U_n(a)}^{-1}(F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2})\,\overline{U_n(b)}$$

とおくと、E は、性質 (5) より $F(X)$ の閉集合となる。しかも、$e \notin E$ となっている。なぜならば、もしある $u_n \in \overline{U_n(a)}$ と $v \in F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2}$, そして $w_n \in \overline{U_n(b)}$ があって $e = u_n^{-1} v w_n$ となったとすると、

$$v = u_n w_n^{-1} \in \overline{U_n(a)}\,\overline{U_n(b)}^{-1} \subset V_{2n} \subset V_{2n+2}$$

となりこれは矛盾する。故に、e の近傍 U_e で次を満たすものがとれる。

$$\overline{U_e}\,\overline{U_e}^{-1} \subset F(X) \setminus E, \text{ 且つ } \overline{U_e \cap F_{2n+1}(X)} \text{ はコンパクト。}$$

ここで、

$$U_{n+1}(a) = (U_n(a)\,U_e) \cap F_{n+1} \text{ そして、} U_{n+1}(b) = (U_n(b)\,U_e) \cap F_{n+1}$$

とおくと、明らかにこれらの集合は、性質 (1), (2) そして (3) を満たす。よって、性質 (4) と (5) を満たすことを示す。そのために、$u = vw \in F_{n+1}(X)$, 但し、$v \in U_n(a)$, $w \in U_e$ とする。すると、$\ell(v) \leq n$ 且つ $\ell(u) \leq n+1$ より、$\ell(w)$ は $n+n+1 = 2n+1$ 以下とならなければならない。よってこのことより、

$$U_{n+1}(a) \subset U_n(a)\,(U_e \cap F_{2n+1}(X))$$

となることがわかる。故に、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a)} &\subset \overline{U_n(a)\,(U_e \cap F_{2n+1}(X))} \\ &\subset \overline{\overline{U_n(a)}\,\overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))}} \\ &\subset \overline{\overline{U_n(a)}\,(\overline{U_e} \cap F_{2n+1}(X))} \end{aligned}$$

となる。そこで今、$\overline{U_n(a)}\,\overline{(U_e \cap F_{2n+1}(X))}$ はコンパクトより、$\overline{U_{n+1}(a)}$ もまたコンパクトとなる。同様にすれば、$\overline{U_{n+1}(b)}$ もコンパクトになることが分かる。つまり、性質 (5) が示せた。さらに、$\overline{U_n(a)}\,(\overline{U_e} \cap F_{2n+1}(X))$ は $F(X)$ の閉集合より、

$$\overline{U_{n+1}(a)} \subset \overline{U_n(a)}\,(\overline{U_e} \cap F_{2n+1}(X)) \subset \overline{U_n(a)}\,\overline{U_e}$$

となる。同様にすると、

$$\overline{U_{n+1}(b)} \subset \overline{U_n(b)}\,(\overline{U_e} \cap F_{2n+1}(X)) \subset \overline{U_n(b)}\,\overline{U_e}$$

も得られる。以上より、

$$\begin{aligned} \overline{U_{n+1}(a)}\,\overline{U_{n+1}(b)} &\subset \overline{U_n(a)}\,\overline{U_e}\,\overline{U_e}^{-1}\,\overline{U_n(b)}^{-1} \\ &\subset \overline{U_n(a)}\,(F(X) \setminus E)\,\overline{U_n(b)}^{-1} \end{aligned}$$

となる。一方、

$$\overline{U_{n+1}(a)}\,\overline{U_{n+1}(b)} \subset F_{2n+2}(X)$$

となっている。そこでもし、

$$x \in \overline{U_{n+1}(a)}\,\overline{U_{n+1}(b)} \cap (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+2})$$

となる x が存在したとすると、上の事実より $x = u_n y v_n^{-1}$、但し $u_n \in \overline{U_n(a)}, y \in F(X) \setminus E$ 且つ $v_n \in U_n(b)$ とおける。すると、

$$y = u_n^{-1} x v_n \in \overline{U_n(a)}^{-1} (F_{2n+2}(X) \setminus V_{2n+1})\, \overline{U_n(b)} = E$$

となるが、これは不可能である。つまり、次のことが分かる。

$$\overline{U_{n+1}(a)}\,\overline{U_{n+1}(b)}^{-1} \subset V_{2n+2}.$$

よって、性質 (4) が示せた。

次に、

$$U(a) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(a) \text{ そして、} U(b) = \bigcup_{i=k}^{\infty} U_i(b)$$

とおくと、性質 (1) ~ (4) より、次のことがすぐに分かる。

$$U(a), U(b) \in \mathcal{V}, \text{ 且つ } U(a)U(b)^{-1} \subset V.$$

以上の議論より、$\mathcal{V}$ が $F(X)$ 上のある群位相 $\mathcal{T}_1$ を導入する。明らかに、$\mathcal{T}_1|_X$ は X の位相と等しいことより、$\mathcal{T}_1$ は $F(X)$ 上の自由群位相よりは弱い。つまり、各 $V \in \mathcal{V}$ は $F(X)$ の開集合となり、定理が証明された。 ■

この結果を利用すると、次の重要な性質が示される。

系 1.14 K を $G(X)$ のコンパクト部分集合とすると、ある $n \in N$ が存在して $K \subset G_n(X)$ となる。

証明 今、$\bar{i}$ を包含写像 $i : X \longrightarrow F(\beta X)$ を拡張した、$F(X)$ 上の連続な順同型写像とすると、K はコンパクトより $\bar{i}(K)$ もコンパクトとなる。そこで、この $\bar{i}(K)$ がある $F_n(\beta X)$ に含まれることを示す。今、そうならないと仮定すると、ある点列 $\{g_n : n \in N\}$ が $\bar{i}(K)$ に存在して、次を満たす。

$$g_n \in F_{k_n+1}(\beta X) \setminus F_{k_n}(\beta X).$$

但し、$\{k_n : n \in N\}$ は N の無限部分点列である。すると、定理 1.9 より、$\{g_n : n \in N\}$ は離散位相を持つ $F(\beta X)$ の閉部分集合となるが、これは矛盾である。故に、ある $n \in N$ が存在して、

$$K = \bar{i}^{-1}\,\bar{i}(K) \subset \bar{i}^{-1}(F_n(\beta X)) = F_n(X)$$

となる。 ■

2　Graev の擬距離

この節では、M. I. Graev が構成したいわゆる"Graev の距離"を拡張した、$G(X)$ 上の擬距離を紹介する。その応用として、A. V. Arhangel'skiĭ [1] や C. Joiner [7] によって得られた、$G(X)$ の位相的構造を調べる上に重要ないくつかの結果も紹介する。

さて、Graev の擬距離の構成は $F(X)$ と $A(X)$ のいずれにおいても同様にできるので、ここでは $F(X)$ において構成する。まず、構成に必要ないくつかの概念を準備する。

空間 X に対して、$S(X)$ を $\widetilde{X}$ の元から生成される全ての表現（規約な表現でなくてもよい）$x_1x_2\cdots x_n$ からなる半群とする。すると、$F(X)$ は $S(X)$ の規約な表現だけを集めた群となっている。さて、任意の $g, h \in S(X)$ に対して、$g \equiv h$ は g と h の表現が全く同じであることとする。また、$g = h$ は、それぞれの g と h の規約表現が等しいことを表す。さて今、$g \equiv x_1x_2\cdots x_n \in S(X)$ 但し、各 $x_i \in \widetilde{X}$ とする。このとき、n を g の長さ と呼び、$\ell(g)$ と書く。各 $g \in F(X)$ においては、長さの定義は一致していることはすぐに分かる。

さて、空間 X における連続な擬距離 d をとる。まず最初に、この d を次のように $\widetilde{X}$ 上に拡張した d' を決める。

任意の $x \in X$ に対して、$d'(x, e) = d'(x^{-1}, e) = 1$,
任意の $x, y \in X$ の対して、$d'(x, y) = d'(x^{-1}, y^{-1}) = d(x, y)$,
任意の $x, y \in X$ に対して、$d'(x, y^{-1}) = d'(x^{-1}, y) = d'(x, e) + d'(y, e)$.

そこで、d' を $F(X)$ 上に拡張する。任意に $g, h \in F(X)$ をとり、

$$\overline{d}(g, h) = \inf\{\sum_{i=1}^{k} d'(x_i, y_i) \;\;:\;\; g' \equiv x_1x_2\cdots x_k, h' \equiv y_1y_2\cdots y_k \in S(X)$$
$$\text{但し } g = g' \text{ 且つ } h = h'\}$$

とおく。ここで便宜上、$\phi(g', h') = \sum_{i=1}^{k} d'(x_i, y_i)$ とする。ここで、$\overline{d}$ の持つ次の重要な性質を証明する。

命題 2.1　任意の $g,h \in F(X)$ に対して、次を満たす $g',h' \in S(X)$ が存在する。

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \overline{d}(g,h) = \phi(g',h').$$

証明　任意の $g,h \in F(X)$ をとり、$g \equiv x_1x_2\cdots x_m$, $h \equiv y_1y_2\cdots y_n$ を g と h の既約表現とする。但し、$x_i, y_j \in X \cup X^{-1}$ である。また、任意の $g',h' \in S(X)$ で $g = g', h = h'$ となるものをとり、

$$(*) \begin{pmatrix} g' \equiv a_1a_2\cdots a_s \equiv A_0x_1A_1x_2\cdots A_{m-1}x_mA_m \\ h' \equiv b_1b_2\cdots b_s \equiv B_0y_1B_1y_2\cdots B_{n-1}y_nB_n, \end{pmatrix}$$

とおく。但し、各 $a_i, b_j \in \widetilde{X}$ で $A_i, B_j \in S(X)$ 且つ $A_i = B_j = e$ である。さて、上記の表現 $(*)$ において、各$\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ を**コラム**と呼ぶことにする。そこで、$(*)$ の上段から x_i を 1 つとり、その下にある元を u_1 とする。このときもし、u_1 が e または y_j ならば操作を終わる。それ以外の場合は、u_1 はある B_{j_1} の元となる。よって、u_1^{-1} が B_{j_1} に存在する。次に、u_1^{-1} の上にある元を u_2 とする。ここで再び、もし u_2 が e もしくはある $x_{i'}$ ならばこの操作を終わる。以下、この操作を終了するまで続ける。(必ず終了する。)

するとこの操作で得られるパターンには、基本的には次の 4 つの場合がある。但し、左右の位置関係は考慮にいれていない。

$$(1) \left\{ \begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1}^{-1} & e \end{array} \right.$$

$$(2) \left\{ \begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n-2}^{-1} & e \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{array} \right.$$

$$(3) \left\{ \begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n} & u_{2n}^{-1} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1}^{-1} & y_j \end{array} \right.$$

$$(4) \left\{ \begin{array}{llllll} x_i & u_2 & u_2^{-1} & \ldots & u_{2n-2}^{-1} & x_{i'} \\ u_1 & u_1^{-1} & u_3 & \ldots & u_{2n-1} & u_{2n-1}^{-1} \end{array} \right.$$

ここで、(1) と (2) の場合において次のことが分かる。

$$\begin{aligned} & d'(x_i,u_1) + d'(u_2,u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n},u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1},e) \\ = \;& d'(x_i,u_1) + d'(u_1,u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1},u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1},e) \\ \geq \;& d'(x_i,e), \end{aligned}$$

$$d'(x_i,u_1) + d'(u_2,u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1},u_{2n-1}) + d'(e,u_{2n-1}^{-1})$$

$$
\begin{aligned}
&= d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, e). \\
&\geq d'(x_i, e)
\end{aligned}
$$

よって、全ての u_i を e におきかえても、$\phi(g', h')$ の値は増えない。次に (3) の場合は、

$$
\begin{aligned}
& d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n}, u_{2n-1}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
=\ & d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-1}, u_{2n}^{-1}) + d'(u_{2n}^{-1}, y_j) \\
\geq\ & d'(x_i, y_j)
\end{aligned}
$$

となるので、全ての u_{2i-1} を y_j に、そして u_{2i} を y_j^{-1} におきかえても、$\phi(g', h')$ の値は増えない。最後に、(4) の場合には、

$$
\begin{aligned}
& d'(x_i, u_1) + d'(u_2, u_1^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(x_{i'}, u_{2n-1}^{-1}) \\
=\ & d'(x_i, u_1) + d'(u_1, u_2^{-1}) + \cdots + d'(u_{2n-2}^{-1}, u_{2n-1}) + d'(u_{2n-1}, x_{i'}^{-1}) \\
\geq\ & d'(x_i, x_{i'}^{-1})
\end{aligned}
$$

となるので、全ての u_{2i-1} を $x_{i'}^{-1}$ に、そして u_{2i} を $x_{i'}$ におきかえても、$\phi(g', h')$ の値は増えない。

そこで、この操作を残っている全ての x_k、そして次に残っている全ての y_l に対して行う。但し、例えば、ある x_i における操作が、$x_{i'}$ で終わった場合 ((4) の場合) は、$x_{i'}$ についてはこの操作は行わない。さて、全ての操作が終了した後まだ残っているコラムがあれば、それらの元は全て e におきかえる。そして最後に、$\begin{pmatrix} e \\ e \end{pmatrix}$ のコラムは全て取り除く。こうして得られた新しい表現を g_1, $h_1 \in S(X)$ とおくと、g_1 と h_1 は次の性質を持っている。

(1) $g_1 = g$, $h_1 = h$ 且つ $\ell(g_1) = \ell(h_1)$ 。

(2) g_1 と h_1 の全ての元は $x_i^{\varepsilon_i}$, $y_j^{\varepsilon_j}$, または e のいずれかである。但し、$\varepsilon_i = \pm 1 = \varepsilon_j$。

(3) 各 x_i の下にくるのは e, $x_{i'}^{-1}$ $(i \neq i')$, または y_j のいずれかであり、各 y_j の上にくるのは e, $y_{j'}^{-1}$ $(j \neq j')$, または x_i のいずれかである。

(4) $\begin{pmatrix} g_1 \\ h_1 \end{pmatrix}$ において、$\phi(g_1, h_1)$ の値に影響を与えるコラムの数は、高々 $m+n$ である。

(5) $\phi(g_1, h_1) \leq \phi(g', h')$.

さて、性質 (4) より上記の (1) $\sim$ (5) の性質を満たす g と h の表現に対して、関数 ϕ によるその値は高々有限個の値しか取り得ない。そこで、$g_2, h_2 \in S(X)$ を上記の (1) $\sim$ (5) の性質を満たし、$\phi(g_2, h_2)$ が最小の値をとるものとする。すると、この g_2 と h_2 が求めるものとなる。 ■

そこで、$g, h \in F(X)$ をとり、$g', h' \in S(X)$ を

$$g = g', h = h', \text{ 且つ } \overline{d}(g,h) = \phi(g', h')$$

を満たすものとし、$g \equiv x_1 x_2 \cdots x_m$, $h \equiv y_1 y_2 \cdots y_n$ を g と h の既約表現、但し x_i, $y_j \in X \cup X^{-1}$ とおき、また、

$$(*) \left(\begin{array}{l} g' \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \equiv A_0 x_1 A_1 x_2 \cdots A_{m-1} x_m A_m \\ h' \equiv b_1 b_2 \cdots b_s \equiv B_0 y_1 B_1 y_2 \cdots B_{n-1} y_n B_n, \end{array} \right.$$

とおく。但し、各 $a_i, b_j \in \widetilde{X}$ で $A_i, B_j \in S(X)$ 且つ $A_i = B_j = e$ である。また、g' と h' の各元 a において、$|a|$ を $a \in X$ のときは $|a| = a$ 、$a \in X^{-1}$ のときは $|a| = a^{-1}$ となるものとし、$\varepsilon(a) = \pm 1$ を $a = |a|^{\varepsilon(a)}$ となるものとおく。すると、命題 2.1 の証明より、$\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ は更に次の性質を満たすことが分かる。

補題 2.2 $i_1 \neq i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ に対して、$|x_{i_1}| = |x_{i_2}|$ 且つ $\varepsilon(x_{i_1}) \times \varepsilon(x_{i_2}) = -1$ とすると、$|i_1 - i_2| > 1$ となる。

補題 2.3 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、あるコラム $\begin{pmatrix} x_i \\ x_j^{-1} \end{pmatrix}$ $(i \neq j)$ が存在して $d'(x_i, x_j^{-1}) > 0$ で $|i - j| > 1$ とする。このとき、任意の x_k $(\min\{i,j\} < k < \max\{i,j\})$ に対して、$\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において x_k の下にくるのは、e または x_l^{-1} $(\min\{i,j\} < l < \max\{i,j\})$ のみである。

補題 2.4 $\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、あるコラム $\begin{pmatrix} x_i \\ y_j \end{pmatrix}$ が存在して $d'(x_i, y_j) > 0$ とする。このとき、任意の x_k $(k < i)$ に対して、$\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において x_k の下にくるのは、e または x_l^{-1} $(l < i,\ l \neq k)$ または y_l $(l < j)$ のみである。また、任意の y_k $(k < j)$, x_k $(k > i)$, y_k $(k > j)$ についても同様のことがいえる。

M. I. Graev [5] は、命題 2.1 を利用してさらに、$\overline{d}$ が $F(X)$ 上のある群位相を導入する擬距離（ M. I, Graev の証明は距離）となり、自由群位相 $\mathcal{T}$ よりは弱い位相となることを示した。一方、A. V. Arhangel'skiĭ [1] と C. Joiner [7] は、それぞれ独立に次の重要な結果を証明した。この結果は、上記の補題を利用すると比較的簡単に証明できる。

定理 2.5　X を空間とする。任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(F_n(X)\setminus F_{n-1}(X))} \\ &\quad : i_n^{-1}(F_n(X)\setminus F_{n-1}(X)) \longrightarrow F_n(X)\setminus F_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は同相写像となる。

証明　f_n が開写像となることを示せばよい。そこで、任意の $g \in F_n(X)\setminus F_{n-1}(X)$ をとり、$g \equiv x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\cdots x_n^{\varepsilon_n}$ をその既約表現とする。そこで、$(x_1^{\varepsilon_1}, x_2^{\varepsilon_2}, \ldots, x_n^{\varepsilon_n})$ の $\widetilde{X}^n$ での任意の近傍 U をとり、d を X 上の連続な擬距離で次を満たすものとする。ある $\delta' > 0$ があって、

$$U_{\delta'}(x_1^{\varepsilon_1}) \times U_{\delta'}(x_2^{\varepsilon_2}) \times \cdots \times U_{\delta'}(x_n^{\varepsilon_n}) \subset U$$

となる。ここで、各 $U_{\delta'}(x_i^{\varepsilon_i})$ は $x_i^{\varepsilon_i}$ の $\widetilde{X}$ での δ'–近傍である。このとき、十分小さな $\delta > 0$ に対して

$$B_\delta(g) \cap (F_n(X)\setminus F_{n-1}(X)) \subset f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n})),$$

を示せばよい。ここで、各 $B_\delta(g)$ は g の $(F(X), \overline{d})$ での δ–近傍である。実際、$\delta > 0$ を

$$2\delta < \min(\{\, d'(x_i, x_j) : x_i \neq x_j\}, 1, \delta')$$

を満たすようにとる。そこで、任意の $h \equiv y_1^{\xi_1}y_2^{\xi_2}\cdots y_n^{\xi_n} \in B_\delta(g) \cap (F_n(X)\setminus F_{n-1}(X))$ をとり、命題 2.1 より $g', h' \in S(X)$ を $g' = g, h = h'$, 且つ $\overline{d}(g,h) = \phi(g',h')$ となるものとする。このとき、$\begin{pmatrix} g' \\ h' \end{pmatrix}$ において、（ d' の値が 0 にならない）各 $x_i^{\varepsilon_i}$ の下には $y_i^{\xi_i}$ がくることを示す。

今、δ の仮定より $x_i^{\varepsilon_i}$ の下には、e はこない。そこで $x_i^{\varepsilon_i}$ の下に $x_j^{-\varepsilon_j}$ があるとすると、δ の仮定より $x_i = x_j$ 且つ $\varepsilon_i \times \varepsilon_j = -1$ となる。よって、補題 2.2 より $|i-j| > 1$ となる。今、$j = i+k$ $(1 \leq k \leq n-i)$ としておく。もし、k が偶数とすると、$x_i^{\varepsilon_i}$ と $x_j^{\varepsilon_j}$ の間には奇数個の $x_l^{\varepsilon_l}$ がある。よって、補題 2.3 と δ の仮定より、ある $k' \in \{i+1, \ldots, j-1\}$ が存在して $x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}$ の下には e がくることになり矛盾する。一方、k が奇数とすると、$x_i^{\varepsilon_i}$ と $x_j^{\varepsilon_j}$ の間には偶数個の $x_l^{\varepsilon_l}$ がある。よって、補題 2.3 と δ の仮定より、ある $k' \in \{i+1, \ldots, j-2\}$

が存在して、$x_{k'}^{\varepsilon_{k'}}$ の下には、$x_{k'+1}^{-\varepsilon_{k'+1}}$ がある。すると、δ の仮定より、$x_{k'} = x_{k'+1}$ 且つ $\varepsilon_{k'} \times \varepsilon_{k'+1} = -1$ となるが、これは補題 2.2 に矛盾する。よって以上より、$x_i^{\varepsilon_i}$ の下にはある $y_j^{\xi_j}$ があることになる。しかしながら、同様の議論と補題 2.4 より、$i = j$ となることが分かる。

故に、

$$\overline{d}(g,h) = \phi(g',h') = \sum_{i=1}^{n} d'(x_i^{\varepsilon_i}, y_i^{\xi_i}) < \delta$$

となる。つまり各 $y_i^{\xi_i} \in U_\delta(x_i^{\varepsilon_i})$ となり、結局 $h \in f_n(U_\delta(x_1^{\varepsilon_1}) \times \cdots \times U_\delta(x_n^{\varepsilon_n})$ となる。 ■

さて、$A(X)$ に関しては同様の議論より、次のことが分かる。

定理 2.6 X を空間とする。任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(A_n(X)\setminus A_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)) \longrightarrow A_n(X) \setminus A_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は $n! - 1$ の開且つ閉写像となる。

系 2.7 (X, d) を距離空間とする。すると、各 $G_n(X)$ は $(G(X), \overline{d}\,)$ の閉部分集合となる。

証明 定理 2.5 の証明より、明らかに

$$B_\delta(g) \cap F_{n-1}(X) = \emptyset$$

となる。 ■

これらの事実より、A. V. Arhangel'skiĭ [1] によって得られた、次の結果が証明できる。

定理 2.8 (X, d) を距離空間とする。すると $G(X)$ は、継承的パラコンパクト且つ F_σ-距離空間となる。

証明　補題 2.7 より、任意の $n \in N$ に対して $Y_n = F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ は 距離空間 $(F_n(X), \overline{d}|_{F_n(X)})$ の開部分集合となる。よって、

$$Y_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_{(n,i)},$$

但し各 $Z_{(n,i)}$ は $(F_n(X), \overline{d}|_{F_n(X)})$ の、よって $(F(X), \overline{d})$ の閉部分集合とおける。今、$\overline{d}$ によって導入される $F(X)$ の群位相は $F(X)$ の自由群位相より弱いので、各 $Z_{(n,i)}$ は $F(X)$ の閉部分集合となる。一方、定理 2.5 より、各 $Z_{(n,i)}$ は 距離空間となる。つまり、$F(X)$ は F_σ–距離空間となる。

つぎに、$F(X)$ が パラコンパクトになることを示す。任意の $F(X)$ の開被覆 $\mathcal{U}$ をとり、各 $n \in N$ に対して、

$$\mathcal{U}_n = \{U \cap Y_n : U \in \mathcal{U}\}$$

とおく。すると $(F_n(X), \overline{d}|_{F_n(X)})$ における、よって実際 $(F(X), \overline{d})$ における $\mathcal{U}_n$ の σ–疎な閉細分 $\mathcal{H}_n = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{H}_{(n,i)}$ がとれる。そこで、各 $H \in \mathcal{H}_n$ に対して $U(H) \in \mathcal{U}$ で $H \subset U(H)$ となるものを選んでおく。すると、各 $n, i \in N$ に対して、$(F(X), \overline{d})$ における開集合からなる疎な族 $\mathcal{W}_{(n,i)} = \{W(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\}$ で

任意の $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$ に対して $H \subset W(H)$ 且つ

任意の $H \in \mathcal{H}_{(n,i)}$ に対して $W(H) \cap Y_n \subset U(H)$

を満たすものが存在する。そこで、

$$\mathcal{G}_{(n,i)} = \{W(H) \cap U(H) : H \in \mathcal{H}_{(n,i)}\} \text{ そして } \mathcal{G} = \bigcup_{n,i=1}^{\infty} \mathcal{G}_{(n,i)}$$

とおくと、$\mathcal{G}$ は $F(X)$ における σ–疎な $\mathcal{U}$ の開細分となり、$F(X)$ はパラコンパクトになる。同様の議論で、$F(X)$ が継承的パラコンパクトになることも証明できる。 ■

3　単位元の近傍系

この節では、いくつかの単位元の近傍系の構成について述べる。まず最初に Graev の擬距離を使って得られた、M. G. Tkačendo [15] が構成した $A(X)$ の単位元の近傍系を紹介する。

さて、X を空間とし、$\mathcal{D}$ を X 上の連続な擬距離をすべて集めた族とする。任意の $d \in \mathcal{D}$ に対して、$\overline{d}$ を 2 節で紹介した $G(X)$ 上の Graev の擬距離とし、それによって導入される $G(X)$ 上の群位相を $\mathcal{T}_{\overline{d}}$ とする。そこで $\mathcal{T}_1$ を

$$\mathcal{T}_1 = \sup\{\, \mathcal{T}_{\overline{d}} : d \in \mathcal{D}\}$$

とおくと、$\mathcal{T}_1$ は $G(X)$ 上の群位相となり、また X は Tychonoff より、$\mathcal{T}_1|_X$ は X の位相と等しくなることが分かる。故に命題 1.4 より、

$$\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}$$

となる。さらに、M. G. Tkačenko [15] は次のことを示した。

定理 3.1 ([15]) $\mathcal{V} = \{\, B_{(1,\overline{d})}(0) : d \in \mathcal{D}\}$, 但し $B_{(1,\overline{d})}(0) = \{g \in A(X) : \overline{d}(g,0) < 1\}$ とおくと、$\mathcal{V}$ は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。故に、$\mathcal{T}_1$ は $A(X)$ における自由群位相と等しくなる。

さて、後で述べるが、空間 X が離散空間でないならば一般に $G(X)$ は Čech 完備空間とはならない。しかしながら、$G(X)$ における、左一様系 が完備になるかどうか、つまり $G(X)$ が Weil 完備空間になるかどうかは問題となっていた。この問題に対して、M. G. Tkačenko は上記の近傍系を使って、次のことを示した。

定理 3.2 ([15]) 空間 X において、$A(X)$ が *Weil* 完備空間となる必要十分条件は X が *Dieudonné* 完備空間となることである。

また V. V. Uspenskiĭ [17] が、やはり X 上の連続な擬距離を使って、別の $G(X)$ の単位元の近傍系を構成した。ここでは、$F(X)$ の場合についてその構成を紹介する。

今、任意の $g \in F_0$ (F_0 については、命題 1.6 を参照のこと) をとると、g は次のように表現される。

$$(*) \qquad g = g_1 x_1^{\varepsilon_1} y_1^{-\varepsilon_1} g_1^{-1} g_2 x_2^{\varepsilon_2} y_2^{-\varepsilon_2} g_2^{-1} \cdots g_n x_n^{\varepsilon_n} y_n^{-\varepsilon_n} g_n^{-1},$$

但し、各 $x_i, y_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$, そして $g_i \in F(X)$ である。このとき次のことが分かる。

定理 3.3 ([17])　X を空間とし、任意の $S=\{d_g : g \in F(X)\} \in \mathcal{D}^{F(X)}$ をとる。このとき任意の $g \in F_0$ に対して、

$$p_S(g) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} d_{g_i}(x_i, y_i) : \ g \text{ のすべての } (*) \text{ の表現を動かす。}\},$$

とおくと、次のことがいえる。

(1) 各 p_S は F_0 上の連続な半ノルムとなる。

(2) $\{\{g : p_S(g) < 1\} : S \in \mathcal{D}^{F(X)}\}$ は $F(X)$ における e の近傍系となる。

この結果の応用として、V. V. Uspnskiĭ は次の重要な事実を証明した。

定理 3.4 ([17])　X を距離空間、Y をその閉部分集合とする。今、Y から生成された $G(X)$ の部分位相群を $<Y>$ とすると、$<Y>$ は $G(Y)$ と代数的に同型であることはもちろんのこと、位相的にも同相である。

さらに最近、O. V. Sipacheva [14] は、新たな $G(X)$ の単位元の近傍系を構成し（その構成は非常に複雑であるが)、定理 3.4 を発展させた次の結果を得た。

定理 3.5 ([14])　X を空間、Y をその部分空間とする。このとき、$G(X)$ の部分位相群 $<Y>$ が $G(Y)$ と代数的に同型で、且つ位相的にも同相となる必要十分条件は、Y 上の連続で有界な擬距離が X の連続な擬距離に拡張できることである。

さらに、この事実より $F(X)$ に関する 定理 3.2 と同じ次の結果を得た。

定理 3.6 ([14])　空間 X において、$F(X)$ が *Weil* 完備空間となる必要十分条件は X が *Dieudonné* 完備空間となることである。

以上、モスクワ大学のグループによって得られた、いくつかの近傍系とその応用を紹介したが、最後に最近得られた $A(X)$ における 0 の近傍系の構成について述べる。その構成には、X 上の極大一様系を利用するので、まず一様系に関するいくつかの定義と記号について述べる。

$(X,\mathcal{U})$ を一様空間とする。任意の $U,V\in\mathcal{U}$ 対して、

$$\begin{aligned} U^{-1} &= \{(x,y)\in X\times X:(y,x)\in U\},\\ U\circ V &= \{(x,z)\in X\times X:\ \text{ある}\ y\in X\ \text{があって}\ (x,y)\in U\ \text{且つ}\ (y,z)\in V\}\end{aligned}$$

とおく。また、$\Delta_X=\{(x,x):x\in X\}$ を $X\times X$ の**対角集合**と呼ぶ。空間 X において、X の位相と同じ位相を導入する X 上の一様系の中で、最も強いものを**極大一様系**と呼び、$\mathcal{U}_X$ で表す。まず、次の補題を証明する。

補題 3.7　今、$k\in N\cup\{0\}$ と $p,k_1,\dots,k_p\in N$ をとり、$\sum_{i=1}^{p}2^{-k_i}<2^{-k}$ とする。このとき、次が成立する。

(1) $(X,\mathcal{U})$ を一様空間、$\{U_n:n\in N\cup\{0\}\}$ を $\mathcal{U}$ の可算部分族で、各 $n\in N\cup\{0\}$ に対して、$U_{n+1}\circ U_{n+1}\circ U_{n+1}\subset U_n$ を満たすとするならば、$U_{k_1}\circ U_{k_2}\circ\cdots\circ U_{k_p}\subset U_k$ となる。

(2) G を群で、その単位元が e とする。このとき、$\{V_n:n\in N\cup\{0\}\}$ を G の e を含む部分集合の可算族で、各 $n\in N\cup\{0\}$ に対して、$V_{n+1}\cdot V_{n+1}\cdot V_{n+1}\subset V_n$ を満たすとするならば、$V_{k_1}\cdot V_{k_2}\cdot\cdots\cdot V_{k_p}\subset V_k$ (cf. [16]) となる。

証明　(1) と (2) のどちらも同様に示せるのでここでは、(1) のみを示す。証明は p に関する帰納法で示す。そこで、各 $n\le p$ に対して (1) が示されたと仮定し、$p+1$ のときを示す。今、ある $j\in\{1,2,\dots,p+1\}$ があって $k_j=k+1$ となったとする。すると帰納法の仮定を使うと、

$$U_{k_1}\circ U_{k_2}\circ\cdots\circ U_{k_{p+1}}\subset U_{k+1}\circ U_{k+1}\circ U_{k+1}\subset U_k$$

となることが簡単に分かる。よって、各 $j\in\{1,2,\dots,p+1\}$ に対して、$k_j<k+1$ と仮定しておく。このときさらに $\sum_{i=1}^{p+1}2^{-k_i}<2^{-(k+1)}$ となったとすると、

$$U_{k_1}\circ U_{k_2}\circ\cdots\circ U_{k_p}\subset U_{k+1},$$

となることより、

$$U_{k_1}\circ U_{k_2}\circ\cdots\circ U_{k_{p+1}}\subset U_{k+1}\circ U_{k+1}\subset U_k$$

が示される。よって、今 $2^{-(k+1)}\le\sum_{i=1}^{p}2^{-k_i}<2^{-k}$ の場合を考えると、ある $j\in\{2,\dots,p\}$ があって、

$$\sum_{i=1}^{j}2^{-k_i}<2^{-(k+1)}\ \text{且つ}\ \sum_{i=1}^{j+1}2^{-k_i}\ge 2^{-(k+1)}$$

となる。よってこのことより、

$$U_{k_1} \circ U_{k_2} \circ \cdots \circ U_{k_{p+1}} \subset U_{k+1} \circ U_{k_{j+1}} \circ U_{k+1} \subset U_{k+1} \circ U_{k+1} \circ U_{k+1} \subset U_k$$

となることが分かり、以上より (1) は示された。 ■

さて、

$$\mathcal{P} = \{P \subset \mathcal{U}_X : P \text{ は可算 }\}$$

とし、任意の $P = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\qquad : (x_i, y_i) \in U_i,\ i = 1, 2, \ldots, k, k \in N\},\ \text{そして} \\ \mathcal{W} &= \{W(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。さらに、任意の $n \in N$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P) &= \{Q \subset P : |Q| = n\}, \\ W_n(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n \\ &\qquad : (x_j, y_j) \in U_{i_j},\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_n}\} \in \mathcal{Q}_n(P)\},\ \text{そして} \\ \mathcal{W}_n &= \{W_n(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。

注意 3.8 上記の定義において、各 $P \in \mathcal{P}$ に対して、P の中には同じ元が存在してもよい。特に、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して、$\{U, U, \ldots\}$ も $\mathcal{P}$ の元としておく。

また、$W(P)$ と $W_n(P)$ の定義において、

$$g \equiv x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k$$

とはなっていないことに注意せよ。つまり、右辺は、規約表現とは限らない。そこで、$W_n(P)$ において、

$$\mathcal{R}_n(P) = \{Q \subset P : |Q| \leq n\}.$$

とすると、Δ_X は任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に含まれているので、明らかに

$$\begin{aligned} W_n(P) &= \{x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_k - y_k \\ &\qquad : (x_j, y_j) \in U_{i_j}\ j = 1, 2, \ldots, k,\ \{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_k}\} \in \mathcal{R}_n(P)\} \end{aligned}$$

となる。

定理 3.9　$\mathcal{W}$ は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。

証明　まず、$\mathcal{W}$ が $A(X)$ の 0 の近傍系の次の公理を満たすことを示す。

(i) 任意の $V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $W + W \subset V$ を満たす。

(ii) 任意の $V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって$-W \subset V$ を満たす。

(iii) 任意の $V \in \mathcal{W}$ と $g \in V$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $g + W \subset V$ を満たす。

(iv) 任意の $U,\ V \in \mathcal{W}$ に対して、ある $W \in \mathcal{W}$ があって $W \subset U \cap V$ を満たす。

(v) $\{0\} = \bigcap \mathcal{W}$.

今、$P = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \mathcal{P}$ と $g \in W(P)$ を任意にとり、$g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n$ 但し、$(x_i, y_i) \in U_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ としておく。そこで、$P_1 = \{A_1, A_2, \ldots\}$, $P_2 = \{B_1, B_2, \ldots\}$ そして $P_3 = \{C_1, C_2, \ldots\}$ を、次を満たすものとする。

(1) $P_1,\ P_2,\ P_3 \in \mathcal{P}$,

(2) 任意の $i \in N$ に対して、$A_i \subset U_{2i-1} \cap U_{2i}$,

(3) 任意の $i \in N$ に対して、$B_i \subset U_i$ 且つ $B_i = -B_i$,

(4) 任意の $i \in N$ に対して、$C_i \subset U_{i+n}$.

すると、$W(P_1) + W(P_1) \subset W(P)$, $-W(P_2) \subset W(P)$, そして $g + W(P_4) \subset W(P)$ となることは明らか。よって、(i), (ii), (iii) は示された。また、(iv), (v) は明らかに成立する。

以上より、$\mathcal{T}_1$ を $\mathcal{W}$ によって生成される $A(X)$ の群位相とする。ここで、任意の $P = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \mathcal{P}$ と $x \in X$ をとり、$W(x) = \{y \in X : (y, x) \in U_1\}$ とおく。すると、$\mathcal{U}_X$ が導入する X の位相は、X のもともとの位相と一致するので、$W(x)$ は X の開部分集合となる。また、$x \in W(x) \subset (W(P) + x) \cap X$ となる。つまり、このことは、$\mathcal{T}_1|_X$ が X の位相より弱いことを示している。

そこで次に、$\mathcal{T}_1$ が $A(X)$ の自由群位相より強くなることを示す。そのために、$A(X)$ における 0 の近傍 V を任意にとる。ここで、$V_0 = V$ とし、さらに $A(X)$ における 0 の近傍 からなる可算族 $\{V_n : n \in N\}$ で、$V_n + V_n + V_n \subset V_{n-1}$ となるものをとる。次に、任意の $n \in N$ に対して、

$$U_n = \{(x, y) \in X \times X : x - y \in V_n\}$$

とおき、$P=\{U_1,U_2,\ldots\}$ とする。今、各 $U_n\in\mathcal{U}_X$ より $P\in\mathcal{P}$ となる。そこで、任意の $g\in W(P)$ をとると、ある $n\in N$ と $(x_i,y_i)\in U_n\ i=1,2,\ldots,n$ があって、

$$g=x_1-y_1+\cdots+x_n-y_n$$

となっている。よって補題 3.7 の (2) より、

$$g\in V_1+V_2+\cdots+V_n\subset V_0=V.$$

故に、$W(P)\subset V$ となる。

以上より、$\mathcal{T}_1|_X$ は X の位相と等しくなり、命題 1.4 の (1) より、$\mathcal{T}_1$ は $A(X)$ の自由群位相より弱くなる。つまり、$\mathcal{T}_1$ は $A(X)$ の自由群位相と等しくなる。よって、$\mathcal{W}$ は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。 ■

定理 3.10　任意の $n\in N$ に対して、$\mathcal{W}_n$ は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系となる。

証明　任意に $n\in N$ をとり固定する。定理 3.9 より $\mathcal{W}|_{A_{2n}(X)}=\{W(P)\cap A_{2n}(X):P\in\mathcal{P}\}$ は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系となる。よって、任意の $P=\{U_1,U_2,\ldots\}\in\mathcal{P}$ に対して、$W_n(P)\subset W(P)\cap A_{2n}(X)$ となる。つまり、次のことを示せばよい。

任意の $P\in\mathcal{P}$ に対して、ある $P_1\in\mathcal{P}$ があって $W(P_1)\cap A_{2n}(X)\subset W_n(P)$ となる。

任意の $P=\{U_1,U_2,\ldots\}\in\mathcal{P}$ をとり、$V_0=U_1$ とおく。さらに、帰納的に $\{V_m:m\in N\}\subset\mathcal{U}_X$ を、次を満たすようにとる。

任意の $n\in N$ に対して、$V_m\circ V_m\circ V_m\subset V_{m-1}\cap U_{m+1}.$

さて、この族 $P_1=\{V_m:m\in N\}$ に対して、

$$W(P_1)\cap A_{2n}(X)\subset W_n(P)$$

となることを示す。そこで、任意に $g\in W(P_1)\cap A_{2n}(X)$ をとり、

$$g=x_1-y_1+x_2-y_2+\cdots+x_k-y_k, \tag{1}$$

とする。但し、$k\in N$ で各 $i=1,2,\ldots,k$ に対して $(x_i,y_i)\in V_i$ とする。今、

$$\begin{aligned} A(g) &= \{x_i : x_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。} i=1,2,\ldots,k\},\\ B(g) &= \{y_i : y_i \text{ は (1) の表現を規約にしたときに残る。} i=1,2,\ldots,k\}. \end{aligned}$$

とおく。ここで、$i \neq j$ となる $i, j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して、$x_i = x_j$ $(y_i = y_j)$ であっても、これらの元 x_i と x_j (y_i と y_j) は $A(g)$ $(B(g))$ の中では異なる元とみなすことにする。さて、$g \in A_{2n}(X)$ より、$|A(g)| = |B(g)|$ 且つ $|A(g)| + |B(g)| \leq 2n$ となっている。よって、$A(g) = \{a_1, a_2, \ldots, a_\ell\}$ $(\ell \leq n)$ とおき、任意に $a_i \in A(g)$ をとる。すると、ある $k(i,1) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ があって $a_i = x_{k(i,1)}$ となる。このとき、もし $y_{k(i,1)} \in B(g)$ となっていれば $b_{\varphi(i)} = y_{k(i,1)}$ とおく。そうでないときは、$y_{k(i,1)}$ は (1) の表現を規約にすると消えるので、ある $k(i,2) \in \{1, \ldots, k\}$ があって $y_{k(i,1)} = x_{k(i,2)}$ となる。このとき明らかに $k(i,2) \neq k(i,1)$ である。このとき、もし $y_{k(i,2)} \in B(g)$ となっていれば、$b_{\varphi(i)} = y_{k(i,2)}$ とおく。そうでないときは、同様にして $k(i,3) \in \{1, 2, \ldots, k\}$ で $y_{k(i,2)} = x_{k(i,3)}$ 且つ $k(i,3) \notin \{k(i,1),\ k(i,2)\}$ となるものがとれる。以下、この操作を $B(g)$ の元が現れるまで行い、その $B(g)$ の元を $b_{\varphi(i)}$ とする。明らかに、$b_{\varphi(i)}$ は、必ず現れる。

以上の操作を $A(g)$ の全ての元に対して行うと、φ は $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ 上の置換となり、また $\{k(i,1), k(i,2), \ldots, k(i, j(i))\} \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $i = 1, 2, \ldots, \ell$, は次のことを満たす。

(2) 各 $i = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して、$a_i = x_{(i,1)}$ 且つ $b_{\varphi(i)} = y_{k(i,j(i))}$,

(3) 各 $j = 1, 2, \ldots, j(i) - 1, i = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して、$y_{k(i,j)} = x_{k(i,j+1)}$,

(4) $\{k(i,j) : j = 1, 2, \ldots, j(i), i = 1, 2 \ldots, \ell\}$ はすべて異なる数からなる。

よって (2) と (3) より、各 $i = 1, 2, \ldots, \ell$ に対して、

$$(a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i,1)} \circ V_{k(i,2)} \circ \cdots \circ V_{k(i,j(i))}$$

となる。ここで、$k(i) = \min\{k(i,1), k(i,2), \ldots, k(i, j(i))\}$ とすると (4) より、$\{k(1), k(2), \ldots, k(\ell)\}$ は 異なる数からなる $\{1, 2, \ldots, n\}$ の部分列となる。故に補題 3.7 の (1) と P_1 の定義より、

$$任意の\ i = 1, 2, \ldots, \ell\ に対して、(a_i, b_{\varphi(i)}) \in V_{k(i)-1} \subset U_{k(i)}$$

となる。一方、φ は $\{1, 2, \ldots, \ell\}$ 上の置換より

$$g = a_1 - b_{\varphi(1)} + a_2 - b_{\varphi(2)} + \cdots + a_\ell - b_{\varphi(\ell)}.$$

と表される。よって、注意 3.8 より、$\{U_{k(1)}, U_{k(2)}, \ldots, U_{k(\ell)}\} \in \mathcal{R}_n(P)$ となっていることから $g \in W_n(P)$ となることが分かる。故に、$W(P_1) \cap A_{2n}(X) \subset W_n(P)$ が示された。■

以上より、$A(X)$ における 0 の近傍系と 各 $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系が得られたが、$A(X)$ と各 $A_n(X)$ が k–空間になる状況について、これらの近傍系を利用していくつかの結果が得られた。このことについては、[18] と [19] を参照されたい。そこで最後に、ここではこれらの近傍系を使って得られる $A(X)$ の基本的な位相的性質について少し述べる。

まず、$\mathcal{W}$ の定義より、空間 X が離散空間でないならば、任意の $n \in N$ と任意の $W \in \mathcal{W}$ に対して、

$$W \cap (A_{n+1}(X) \setminus A_n(X)) \neq \emptyset$$

となることがすぐに分かる。また定理 1.5 より、結局次のことが分かる。

系 3.11　空間 X が離散空間でないならば、$G(X)$ は Baire 空間とはならない。つまり、局所コンパクトにも Čech 完備空間にもなり得ない。

ここで、再び記号を準備する。空間 X と各 $n \in N$ に対して、写像 $j_n : X^{2n} (= X^n \times X^n) \longrightarrow A_{2n}(X)$ を次のように定義する。任意の $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ と $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in X^n$ に対して、

$$j_n((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - (y_1 + y_2 + \cdots + y_n).$$

すると、次のことが分かる。

系 3.12　X を空間、$n \in N$, E を $A_{2n}(X)$ の部分集合とする。このとき $0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$ となることである。但し、$U^n = \{((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in X^{2n} : (x_i, y_i) \in U, i = 1, 2, \ldots, n\}$ とする。

証明　必要性　今、$U \in \mathcal{U}_X$ を任意にとり $P = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \mathcal{P}$ を 任意の $n \in N$ に対して $U_i = U$ となるものとする。すると $W_n(P)$ は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系より、$g \in W_n(P) \cap E$ がとれる。よって、

$$g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \cdots + x_n - y_n,$$

但し、$(x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \ldots, n$ と表せる。つまり、$\boldsymbol{x} = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n))$ とおくと、明らかに$\boldsymbol{x} \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$ となる。

十分性　今、$P = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \mathcal{P}$ を任意にとり、$U \in \mathcal{U}$ を $U \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n$ となるようにとる。すると仮定より、$\boldsymbol{x} = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), (y_1, y_2, \ldots, y_n)) \in j_n^{-1}(E) \cap U^n$ がとれる。すると、各 $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $(x_i, y_i) \in U \subset U_i$ となることより、$j_n(\boldsymbol{x}) \in W_n(P) \cap E$ となる。故に、定理 3.10 より $0 \in \overline{E}$ となる。 ■

系 **3.13** X をパラコンパクト空間、E を $A_2(X)$ の部分集合とする。このとき、$0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は $\overline{j_1^{-1}(E)} \cap \Delta_X \neq \emptyset$ となることである。

参考文献

[1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.

[2] A. V. Arhangel'skiĭ, Algebraic objects generated by topological structure, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.

[3] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.

[4] R. Engelking, General Topology, Heldermann, Berlin, 1989.

[5] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.

[6] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Academic Press, 1963.

[7] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.

[8] S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct product topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 595-598.

[9] Y. kodama and K. Nagami, 位相空間論, 岩波書店, 1974.

[10] A. A. Markov, On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 31 (1941) 299-301.

[11] A. A. Markov, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.

[12] T. Nakayama, Note on free topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 471-475.

[13] L. S. Pontrjagin, Continuous groups, Moscow, 1938; English translation: Topological groups, Princeton, N. I.: Princeton University Press 1939.

[14] O. V. Sipacheva, Free topological groups of spaces and their subspaces, Preprint.

[15] M. G. Tkačenko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.

[16] M. G. Tkačenko, On topologies on free groups, Czechoslovak Math. J. 34 (1984) 541-551.

[17] V. V. Uspenskiĭ, On subgroups of free topological groups, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 847-849.

[18] K. Yamada, Free Abelian topological groups and k-spaces, Submitted.

[19] K. Yamada, Characterizations of a metrizable space such that every $A_n(X)$ is a k-space, Topology Appl. (to appear).

[20] K. Yamada, Remark on a topology of free topological groups, Manuscript.